

Método Vanna-Volga para construção de volatilidades implícitas

Pedro Cruz, NCF-IGCP

6421454367744958005734787462354327290498547563443573
6354542576125423467876590867634865445787682357458974
3573635454257612542346787659086763486544578768235745
8974370398356378356458005734787462354327290498547563
4435736354542576125423467876590867634865445787682357
4589743703983563783564214543677449580057347874623543
2729049854756344357363545425761254234678765908676348
6544578768235745897437039835637835642145436774495800
7876590867634865445787682357458974370398356378356421
4543677449580057347874623543272904985475634435736354
5425761254234678765908676348654457876823574589743703
9835637835642145436774495800573478746235432729049854
7563443573635454257612542346787659086763486544578768
2357458974370398356378356421454367744958005734787462
3543272904985475634435736354542576125423467876590867
6348654457876823574589743703983563783564214543677449
5800573478746235432729049854756344357363545425761254
2346787659086763486544578768235745897437039835637835
6421454367744958005734787462354327290498547563443573
6354542576125423467876590867634865445787682357458974
3703983563783564214543677449580057347874623543272904
9854756344357363545425761254234865445787682357458974
3703983563783564214543677449580057347874623543272904
9854756344357363545425761253543272904985475634435736
3354327290498547563443573633543272904985475634435736
3354327290498547563443573634234678765908631544576556
057347898774629049852904985475904985475634434756344

Objetivo

O presente documento tem por objetivo constituir uma nota metodológica assim como uma análise empírica do método Vanna-Volga para construção de volatilidades implícitas, servindo de suporte à sua implementação e justificando a sua adoção.

Pretende-se com este método, partindo de volatilidades implícitas (no modelo de Black-Scholes) para um conjunto restrito de opções europeias *vanillas ATM*, 25Δ Call e 25Δ Put, construir uma matriz (um vetor para cada maturidade) de volatilidades que inclua um conjunto mais alargado de graus de *moneyness* de opções equivalentes.

Será testada a capacidade do modelo em conseguir aproximar através deste modelo as volatilidades para outros graus de *moneyness* para três pares de moedas (EUR/USD, EUR/GBP, e EUR/JPY) e para três maturidades da opção (3M, 6M e 1Y).

A explicação do modelo segue de perto o trabalho original de Castagna e Mercurio [1] e, principalmente, a generalização de Shkolnikov [2].

Fundamentação

De modo a avaliar *FX Options* é necessário obter do mercado informação das volatilidades dessas opções (que equivale a obter um preço, condicional a que todos utilizem os mesmos valores de variáveis restantes do modelo de Black-Scholes). Considerando três pares de moedas (EUR/USD, EUR/GBP, EUR/JPY), as maturidades para as quais temos taxas de juro para cada um destes pares¹ e os 19 de graus de *moneyness* utilizados pelo WSS (oito níveis de Δ para *calls* e *puts* mais o *ATM*), o número de *tickers* a obter to mercado poderia atingir os 551. Mesmo com o mercado a cotar apenas 9 graus de *moneyness*², o número de *tickers* que seria preciso obter do mercado atingiria os 261.

Pretende-se utilizar três valores de volatilidade (os respeitantes ao *ATM* e aos 25Δ) construir os outros seis e comparar com as cotações de mercado. Aceitando os resultados

¹ As maturidades para as quais temos taxas de juro para cada um dos pares de moedas considerados são as seguintes:

EUR/USD	1D	1W	2W	3W	1M	2M	3M	4M	6M	9M	1Y
EUR/GBP	1D	1W	2W	--	1M	2M	3M	4M	6M	9M	1Y
EUR/JPY	1D	--	--	--	1M	2M	3M	4M	6M	9M	1Y

² São os seguintes os 9 graus de *moneyness* considerados no presente estudo:

10 Δ put	15 Δ put	25 Δ put	35 Δ put	ATM	35 Δ call	25 Δ call	15 Δ call	10 Δ call
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----	------------------	------------------	------------------	------------------

como uma boa aproximação necessitaremos de apenas 87 *tickers* e podemos construir os restantes 464 valores.

Dados de mercado

Por convenção, o mercado utiliza o modelo de Black-Scholes (equação (1)) aplicado a *FX options* para extrair volatilidades implícitas. Esta especificação, muitas vezes chamada de modelo de Garman-Kohlhagen, resulta nas equações (2) e (3) para o preço de *plain vanilla european calls* e *puts*, respetivamente.

$$\frac{dS}{S} = \left(-\frac{\ln(P^f(0, T))}{T} + \frac{\ln(P^d(0, T))}{T} \right) dt + \sigma dW \quad (1)$$

$$C(S, T) = SP^d(0, T)\phi(d_1) - KP^f(0, T)\phi(d_2) \quad (2)$$

$$P(S, T) = KP^f(0, T)\phi(-d_2) - SP^d(0, T)\phi(-d_1) \quad (3)$$

estando definido,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{SP^f(0, T)}{KP^d(0, T)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (4)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (5)$$

e onde S é o valor do câmbio, T a maturidade da opção, $P^f(0, T)$ o fator de desconto da moeda estrangeira e $P^d(0, T)$ o da moeda doméstica³.

Por definição do grego⁴, o delta de cada uma destas opções (*call* e *put*, respetivamente) é o seguinte:

$$\Delta_c \equiv \frac{\partial C}{\partial S} = P^d(0, T)\phi(d_1) \quad (6)$$

³ No caso, por exemplo, do EUR/USD, a moeda estrangeira é o EUR e a doméstica o USD

⁴ Em matemática financeira, os “Gregos” representam genericamente as sensibilidades do preço dos derivados à variação dos parâmetros dos quais depende esse preço. O nome resulta do facto de algumas dessas sensibilidades serem representadas por letras do alfabeto grego (ex.ºs: delta, theta, rho, lambda, ...)

$$\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S} = -P^d(0, T)\phi(-d_1) \quad (7)$$

Repare-se que a $\Delta_c = \Delta_{cx}$ e $\Delta_p = \Delta_{px}$ estão associados os seguintes *strikes*:

$$K_{\Delta_{cx}} = S \frac{P^f(0, T)}{P^d(0, T)} e^{-\phi^{-1}\left(\frac{\Delta_{cx}}{P^f(0, T)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T} \quad (8)$$

$$K_{\Delta_{px}} = S \frac{P^f(0, T)}{P^d(0, T)} e^{\phi^{-1}\left(\frac{\Delta_{cx}}{P^f(0, T)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T} \quad (9)$$

Do mercado, para além das cotações de volatilidades ATM, podemos obter não as volatilidades diretamente em termos de delta mas para *risk-reversals (RR)* e *butterflies (Bf)*. Para um *25RR* e um *25Bf* (e de forma equivalente para outros graus de *moneyness*), estas volatilidades podem ser definidas da seguinte forma:

$$\sigma_{RR} = \sigma_{25\Delta c} - \sigma_{25\Delta p} \quad (10)$$

$$\sigma_{Bf} = \frac{\sigma_{25\Delta c} + \sigma_{25\Delta p}}{2} - \sigma_{ATM} \quad (11)$$

Deste modo estas cotações correspondem, sabendo a volatilidade ATM, a conhecer as volatilidades para os *25Δcall* e *25Δput*.

Os gregos Vega, Vanna e Volga

Tanto Vanna como Volga são gregos de segunda ordem associados a um determinado contrato de opções. Podem ser vistos como derivadas de primeira ordem do grego de primeira ordem vega. Para um determinado contrato *B* o vega desse contrato representa a forma como o seu valor responde a variações da volatilidade σ .

$$vega_B = \frac{\partial B}{\partial \sigma} \quad (12)$$

O grego vanna é a forma como vega varia com alterações do *underlying S*.

$$vanna_B = \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma \partial S} \quad (13)$$

Já volga é a forma como vega se altera com mudanças na volatilidade.

$$volga_B = \frac{\partial^2 B}{\partial \sigma^2} \quad (14)$$

Para o caso de *call options* no modelo de Black-Scholes e com as definições já dadas anteriormente, resultas as seguintes expressões:

$$vega_c = SP^f(0, T) \sqrt{T} \phi(d_1) \quad (12b)$$

$$vanna_c = -\frac{vega_c}{S\sigma\sqrt{T}} d_2 \quad (13b)$$

$$volga_c = \frac{vega_c}{\sigma} d_1 d_2 \quad (14b)$$

O método Vanna-Volga

Consideremos um contrato genérico de opções O , com maturidade T e *strike* K do *underlying* S . Este contrato tem como valor de mercado O^{mkt} e como valor segundo Black-Scholes O^{BS} . No modelo de Black-Scholes vamos considerar que a volatilidade σ é *flat* (independente de K), mas que é estocástica, o que implica que, segundo o modelo, temos risco associado a este parâmetro. Queremos construir um portfolio que inclua este contrato e que não tenha o risco associado a σ . Para isso vamos considerar três contratos C_i . Estes correspondem a uma $25\Delta put$ ($i=1$), uma opção ATM ($i=2$) e uma $25\Delta call$ ($i=3$), cada um deles com uma volatilidade específica σ_i e *strike* K_i , embora todas com a mesma maturidade T . Assim, o objetivo passa por obter o preço O^{mkt} como função do seu preço segundo o modelo de Black-Scholes corrigido de termos que envolvem o preço das opções C_i .

Seguindo [3], considera-se o seguinte portfólio:

$$\Pi = O - \Delta_t S - \sum_{i=1}^3 x_i C_i \quad (15)$$

Este portfólio é constituído por um contrato O , a venda de Δ_t unidades do *underlying* e de x_i unidades de cada uma das opções mencionadas. Queremos agora que Π não apresente risco. A equação (16) é o equivalente da equação (15), mas agora com variações totais e considerando apenas valores no modelo de Black-Scholes.

$$d\Pi^{BS} = dO^{BS} - \Delta_t dS - \sum_{i=1}^3 x_i dC^{BS}_i \quad (16)$$

Aplicando o lema de Itô a esta equação e considerando ainda (1):

$$\begin{aligned}
d\Pi^{BS} = & \left[\frac{\partial O^{BS}}{\partial S} - \Delta_t - \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial C_i^{BS}}{\partial S} \right] dS \\
& + \left[\frac{\partial O^{BS}}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial C_i^{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 O^{BS}}{\partial S^2} - \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial^2 C_i^{BS}}{\partial S^2} \right) \right] dt \\
& + \left[\frac{\partial O^{BS}}{\partial \sigma} - \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial C_i^{BS}}{\partial \sigma} \right] d\sigma + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 O^{BS}}{\partial \sigma^2} - \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial^2 C_i^{BS}}{\partial \sigma^2} \right] d\sigma^2 \\
& + \left[\frac{\partial^2 O^{BS}}{\partial S \partial \sigma} - \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial^2 C_i^{BS}}{\partial S \partial \sigma} \right] dS d\sigma \quad (17)
\end{aligned}$$

Obter um *hedge* portfólio corresponde a tornar zero o primeiro, terceiro, quarto e quinto termos do lado direito da equação (17). Além disso, dada a definição de medida neutra ao risco, devemos ter um *drift* que faça com que o portfólio se valorize à taxa de juro sem risco r_f .

$$d\Pi^{BS} = r_f \Pi^{BS} dt \quad (18)$$

Colocando como nulos o terceiro, quatro e quinto termos, ficamos com o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial O^{BS}}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial C_i^{BS}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 O^{BS}}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial^2 C_i^{BS}}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 O^{BS}}{\partial S \partial \sigma} = \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial^2 C_i^{BS}}{\partial S \partial \sigma} \end{array} \right. (=) \left\{ \begin{array}{l} vega_{O^{BS}} = \sum_{i=1}^3 x_i vega_{C_i^{BS}} \\ vanna_{O^{BS}} = \sum_{i=1}^3 x_i vanna_{C_i^{BS}} \\ vanna_{O^{BS}} = \sum_{i=1}^3 x_i vanna_{C_i^{BS}} \end{array} \right. \quad (19)$$

Deste modo, podemos ter algo na forma:

$$w_{O^{BS}} = Vx \quad (20)$$

Assim podemos obter facilmente o valor dos elementos x_i em função dos gregos (no caso de O ser uma *call* ou *put*, que é o que nos mais interessa, então sabemos calcular analiticamente com as equações 12(B), 13(B) e 14(B) os valores de vega, vanna e volga para este contrato). Já de anular o termo em dS obtemos o valor para Δ_t :

$$\Delta_t = \frac{\partial O^{BS}}{\partial S} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial C_i^{BS}}{\partial S} \quad (21)$$

Socorrendo-nos da variável auxiliar $U^{BS} = O^{BS} - \sum_{i=1}^3 x_i C_i^{BS}$, podemos escrever

$$\Delta_t = \frac{\partial U^{BS}}{\partial S} \quad (22)$$

Sabemos já calcular o vetor x , Δ_t , C_i^{BS} e assumimos o mesmo para O^{BS} . De notar ainda que o último termo na expressão em dt é nulo se o contrato O for o de uma call/put dado que num portfólio construído para ter veja nulo terá também gamma zero dada a relação de proporcionalidade entre estes dois gregos. Assim (17) é igual à equação (2) de [1] para este tipo de contratos.

Com tudo isto estamos em condições de enunciar a Proposição 1 enunciada em [2].

Proposição 1

Sob o pressuposto de que o underlying S segue uma dinâmica de Black-Scholes com volatilidade implícita estocástica mas independente do strike, qualquer contrato de opções O com maturidade em T pode ser coberto localmente (dinamicamente) de forma perfeita por um portfólio constituído por uma unidade de O , Δ_t unidades de S e x_i unidades de C_i , onde x é encontrado por (20).

Resta-nos tentar saber O^{mkt} em função destas variáveis. Para isso vamos considerar um portfólio equivalente a (15) mas a valores de mercado (lembrando que temos por pressuposto o conhecimento das cotações de mercado de C_i^{mkt}).

$$\Pi^{mkt} = O^{mkt} - \Delta_t^{mkt} S - \sum_{i=1}^3 x_i C_i^{mkt} \quad (23)$$

Como esta escolha podemos chegar à Proposição 2 de [2].

Proposição 2

Existe um único portfólio $\Pi^{mkt} = O^{mkt} - \Delta_t^{mkt} S - \sum_{i=1}^3 x_i C_i^{mkt}$ que satisfaz a propriedade $\Pi^{mkt} = \Pi^{BS}$ para todo o t . Isto resulta imediatamente em

$$O^{mkt} = O^{BS} + \sum_{i=1}^3 x_i (C_i^{mkt} - C_i^{BS}) \quad (24)$$

DEM Sketch

Considere-se o intervalo temporal entre 0 e T dividido em n períodos de dimensão δt
 $:0 = t_0 < \dots < t_n \equiv T$

A demonstração segue por indução regressiva. No momento $t = t_n$ temos $O^{mkt}(t_n) = O^{BS}(t_n)$, uma vez para um contrato de opção do estilo europeu, esta data corresponde à data de exercício e o seu valor é o seu valor intrínseco. Além disso tem-se que o vetor x é o vetor nulo uma vez que o *hedge* deixa de existir dada a maturidade da opção. Isto implica que $\Pi^{mkt}(t_n) = \Pi^{BS}(t_n)$.

Além disso, por (18):

$$\begin{cases} \delta \Pi^{BS} = r_f \Pi^{BS} \delta t \\ \delta \Pi^{mkt} = r_f \Pi^{mkt} \delta t \end{cases} \quad (25)$$

Utilizando as diferenças entre t_n e t_{n-1} :

$$\begin{aligned} \Pi^{BS}(t_n) - \Pi^{BS}(t_{n-1}) &= r_f \Pi^{BS}(t_{n-1}) \delta t \\ \Pi^{mkt}(t_n) - \Pi^{mkt}(t_{n-1}) &= r_f \Pi^{mkt}(t_{n-1}) \delta t \end{aligned} \quad (26)$$

Subtraindo as duas equações e sabendo já que $\Pi^{mkt}(t_n) = \Pi^{BS}(t_n)$:

$$(1 + r_f \delta t) (\Pi^{BS}(t_{n-1}) - \Pi^{mkt}(t_{n-1})) = 0 \quad (27)$$

Assim, e para $r_f \delta t > -1$ tem-se $\Pi^{BS}(t_{n-1}) = \Pi^{mkt}(t_{n-1})$.

Deste modo $\Pi^{BS}(t_i) = \Pi^{mkt}(t_i) \forall i$.

Definimos agora $U^{Diff} \equiv U^{mkt} - U^{BS}$ e $\Pi^{Diff} \equiv \Pi^{mkt} - \Pi^{BS}$. Do que vimos anteriormente tem-se que $\Pi^{Diff} \equiv 0$ e podemos reescrever esta equação utilizando (22):

$$U^{Diff} - S \frac{\partial U^{Diff}}{\partial S} = 0 \quad (28)$$

A equação (28) é uma equação diferencial com solução

$$U^{Diff}(t) = cteS \quad (29)$$

Como para t_n se tem $O^{BS} = O^{mkt}$ e $C_i^{mkt} = C_i^{BS}$, vem pela definição de U que $U(t_n) = 0$. Deste modo devemos ter $cte = 0$ e portanto

$$U^{Diff}(t) \equiv 0 \quad (30)$$

A equação (30) leva-nos à equação fundamental (24).

□

A equação (24) irá permitir obter aproximações para a volatilidade implícita de qualquer tipo de contrato de opções O e em particular para outras opções *vanilla* que não sejam as consideradas no portfólio de *hedging*.

Aproximação de volatilidades de mercado com o método Vanna-Volga

Vamos particularizar e considerar, tal como em [1], o contrato O como uma *call*⁵, uma vez que o objetivo passa por analisar as diferenças entre as volatilidades de mercado e as dadas pelo método Vanna-Volga para *strikes* fora do ATM e dos 25Δ . Neste estes contratos teríamos como solução de (20):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(K) = \frac{vega(K) \ln \frac{K_2}{K} \ln \frac{K_3}{K}}{vega(K_1) \ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}} \\ x_2(K) = \frac{vega(K) \ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K_3}{K}}{vega(K_2) \ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} \\ x_3(K) = \frac{vega(K) \ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K}{K_2}}{vega(K_3) \ln \frac{K_3}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} \end{array} \right. \quad (31)$$

Para aproximar em primeira ordem a volatilidade do contrato $C^{mkt}(K)$ expandimos em série de Taylor de primeira ordem em torno de σ_{BS} a equação (24).

⁵ As conclusões para uma *put* seriam equivalentes

$$\begin{aligned}
& C^{mkt}(\sigma_{BS}) + \frac{\partial C^{mkt}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_{BS}} (\sigma - \sigma_{BS}) \\
& = C^{BS}(\sigma_{BS}) + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_{BS}} (\sigma_{BS} - \sigma_{BS}) \\
& + \sum_{i=1}^3 x_i \left(\frac{\partial C^{mkt}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_{BS}} (\sigma_i - \sigma_{BS}) - C_i^{BS}(\sigma_{BS}) + C_i^{mkt}(\sigma_{BS}) \right. \\
& \left. - \frac{\partial C^{mkt}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_{BS}} (\sigma_{BS} - \sigma_{BS}) \right) \quad (32)
\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado esquerdo é igual ao segundo do lado direito da equação. Dentro dos parênteses estes termos aparecem de novo. As derivadas que estão incluídas em (32) são calculadas para a volatilidade de Black-Scholes, correspondendo assim ao grego vega. Ficamos com:

$$vega(K, \sigma_{BS})(\sigma - \sigma_{BS}) = \sum_{i=1}^3 x_i vega(K_i, \sigma_{BS})(\sigma_i - \sigma_{BS}) \quad (33)$$

Definindo $y_i = x_i \frac{vega(K_i, \sigma_{BS})}{vega(K, \sigma_{BS})}$, chegamos a:

$$\sigma = \sigma_{BS} \left(1 - \sum_{i=1}^3 y_i \right) + \sum_{i=1}^3 y_i \sigma_i \quad (34)$$

Com esta definição de y_i e com o sistema de equações (31) poderíamos confirmar que $\sum_{i=1}^3 y_i = 1$, ficando a aproximação de primeira ordem $\xi_1(K)$:

$$\sigma = \xi_1(K) = \sum_{i=1}^3 y_i \sigma_i \quad (35)$$

A volatilidade do contrato de uma *call* com *strike* genérico K é assim uma soma ponderada das volatilidades das opções *standard* para as quais temos dados de mercado.

Uma melhor aproximação ξ_2 iria exigir uma expansão de Taylor de segunda ordem da equação (24). As contas seriam as mesmas que anteriormente⁶, mas a álgebra ainda que simples torna-se muito mais extensa. Apresenta-se por isso apenas o resultado final.

⁶ Lembrando que podemos simplificar as expressões finais fazendo $\sigma_{BS} = \sigma_2$

$$\sigma = \xi_2(K) = \sigma_2 + \frac{-\sigma_2 + \sqrt{\sigma_2^2 + d_1(K)d_2(K)(2\sigma_2 D_1(K) + D_2(K))}}{d_1(K)d_2(K)} \quad (36)$$

onde está definido

$$D_1(K) = \xi_1(K) \quad (37)$$

$$D_2(K) = \frac{\ln \frac{K_2}{K} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}} d_1(K_1)d_2(K_1)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K}{K_2}}{\ln \frac{K_3}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} d_1(K_3)d_2(K_3)(\sigma_3 - \sigma_2)^2 \quad (38)$$

Cada uma destas aproximações será agora utilizada para tentar replicar os dados de mercado para volatilidades implícitas fora dos ATM e 25 Δ .

Qualidade das aproximações lineares e quadráticas

Para um total de 88 datas entre 01-9-2015 e 31-12-2015 vamos considerar todas as *moneyness* cotadas pelo mercado para o EUR/USD, EUR/GBP e EUR/JPY. As maturidades das opções são de 3M, 6M e 1Y. Utilizam-se as volatilidades ATM e os 25 Δ 's para, com Vanna-Volga linear e quadrática, aproximar os outros pontos e comparar com o que é cotado. Auxiliariamente necessitamos de utilizar fatores de desconto que utilizam as curvas Eur.12M, Usd.12M, Gbp.12M e Jpy.6M.

As comparações entre as volatilidades dadas por vanna-volga e as cotações de mercado serão efetuadas tendo por base o *Root-Mean-Square-Error* (RMSE). Dadas as escolhas efetuadas poderemos comparar as aproximações entre pares de moedas e maturidades das opções.

A Figura 1 mostra-nos um exemplo de *fit* entre as duas aproximações consideradas e os valores de volatilidade cotados em mercado. Os pontos que interessam, considerando a sua progressão no eixo das abcissas, são o 1°, 2°, 4°, 6°, 8° e 9° (dado serem estes os que não são nem ATM nem 25 Δ).

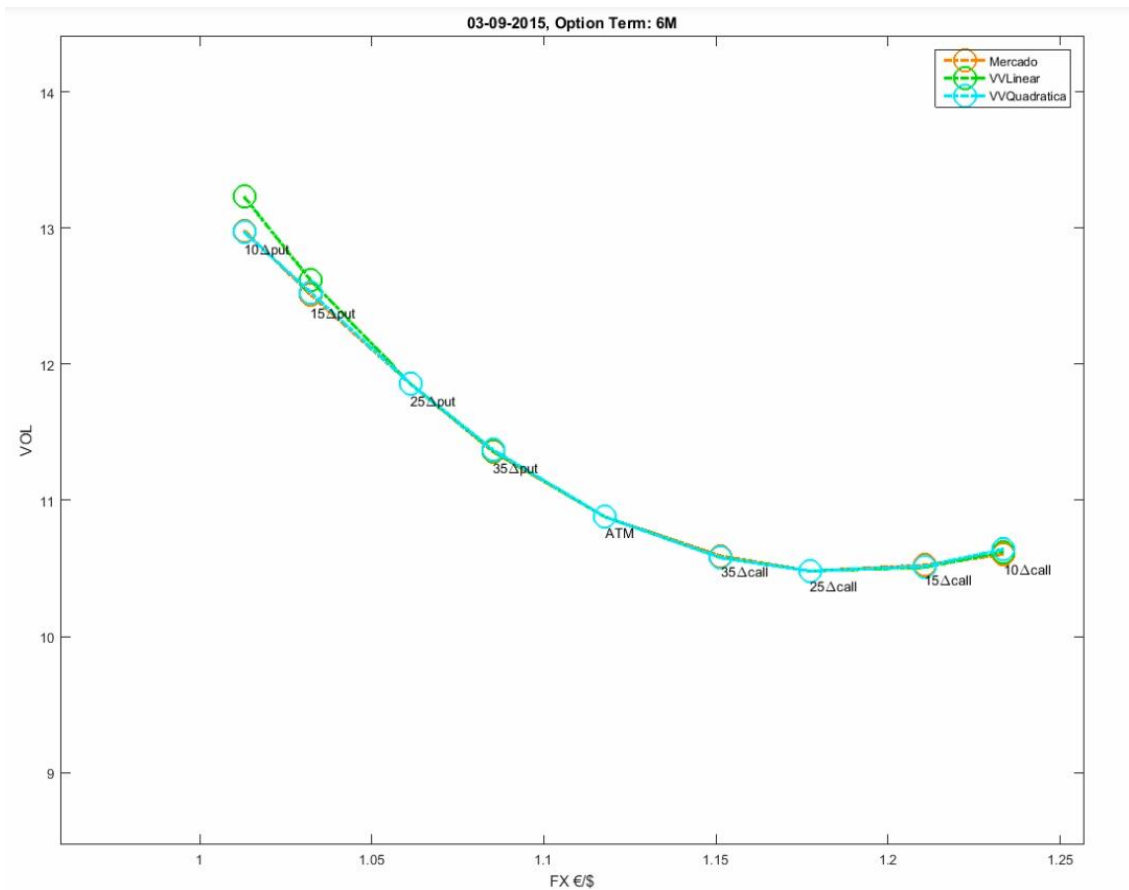


Figura 1 – Comparação entre os valores cotados de volatilidade e os dados pelo método vanna-volga com aproximação linear e quadrática

Neste exemplo podemos ver que a aproximação quadrática leva a valores muito próximos daqueles cotados em mercado. Já a aproximação linear tende a sobrestimar os valores de volatilidade de opções *in-the-money*, ainda que as diferenças não sejam muito significativas.

O Vídeo 1 da próxima página mostra o *fit* de ambas as aproximações mencionadas para todas as datas e considerando o par de moedas EUR/USD e maturidades de 6M para as opções (a que chamamos de caso USD6M). Podemos verificar que as conclusões retiradas considerando a Figura 1 são válidas para todas as datas do caso USD6M. Os *links* para os vídeos de todos os pares de moedas e todas as maturidades de opções são dados na Tabela 1.

USD3M	USD6M	USD1Y	GBP3M	GBP6M	GBP1Y	JPY3M	JPY6M	JPY1Y
Link1	Link2	Link3	Link4	Link5	Link6	Link7	Link8	Link9

Tabela 1 - Links para os vídeos de cada um dos casos considerados

Destes vídeos podemos desde logo notar que as conclusões do caso USD6M são válidas para as outras maturidades da opção neste par de moedas. E ainda que a aproximação quadrática se revele superior, a aproximação linear não apresenta diferenças significativas face ao mercado. Já para o par EUR/JPY (que utiliza uma curva de taxa de juro para o JPY que não é o exato equivalente das outras moedas) a aproximação linear aproxima-se melhor do cotado em mercado.

Este tipo de informação está resumida nas Figuras 2, 3 e 4 que contêm o RMSE para cada um dos casos considerados.

Para o par de moedas EUR/USD a aproximação quadrática revela-se superior à linear nos casos mais problemáticos das 10 Δ put e das 15 Δ put. Isto é especialmente relevante para as maturidades de 6M e 1Y.

Já para o par EUR/GBP nunca chegam a valores que eram atingidos no par anterior. Para os dois graus de moneyness já mencionados a aproximação quadrática revela-se melhor para o caso dos 3M e 6M, mas a situação inverte-se para a maturidade de 1Y.

No caso do EUR/JPY a aproximação linear revela-se superior à aproximação quadrática. Não só porque apresenta diferenças menores face ao mercado do que nos outros dois pares, mas também porque a aproximação quadrática atinge os maiores erros neste caso. Ainda assim, mesmo para o 10 Δ put que é o ponto de maior erro, a média das diferenças é de cerca de 0.4% em volatilidades que rondam os 13%.

Dada a magnitude das diferenças em qualquer das aproximações conclui-se que o método Vanna-Volga aproxima razoavelmente as cotações de mercado.

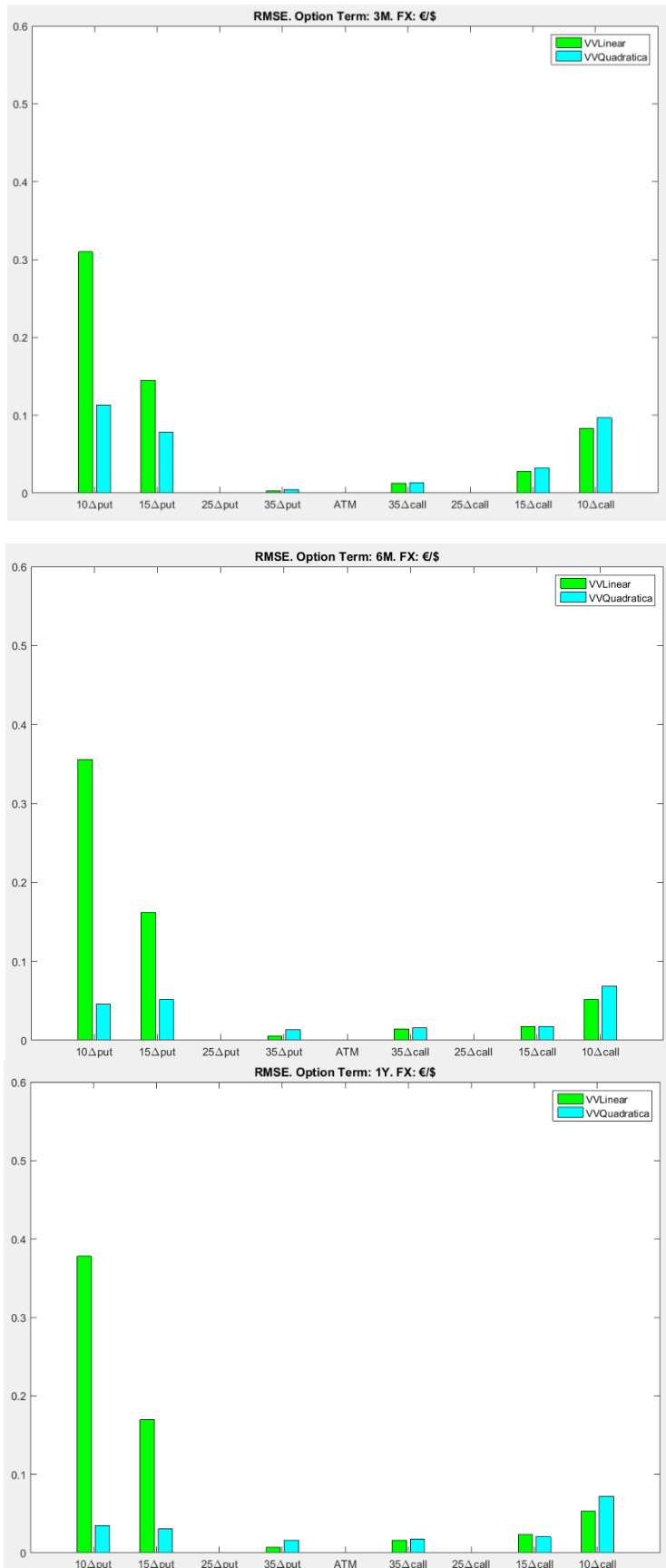


Figura 2 - RMSE para cada grau de *moneyness* no par EUR/USD e para maturidades das opções de 3M (cima), 6M (centro) e 1Y (baixo)

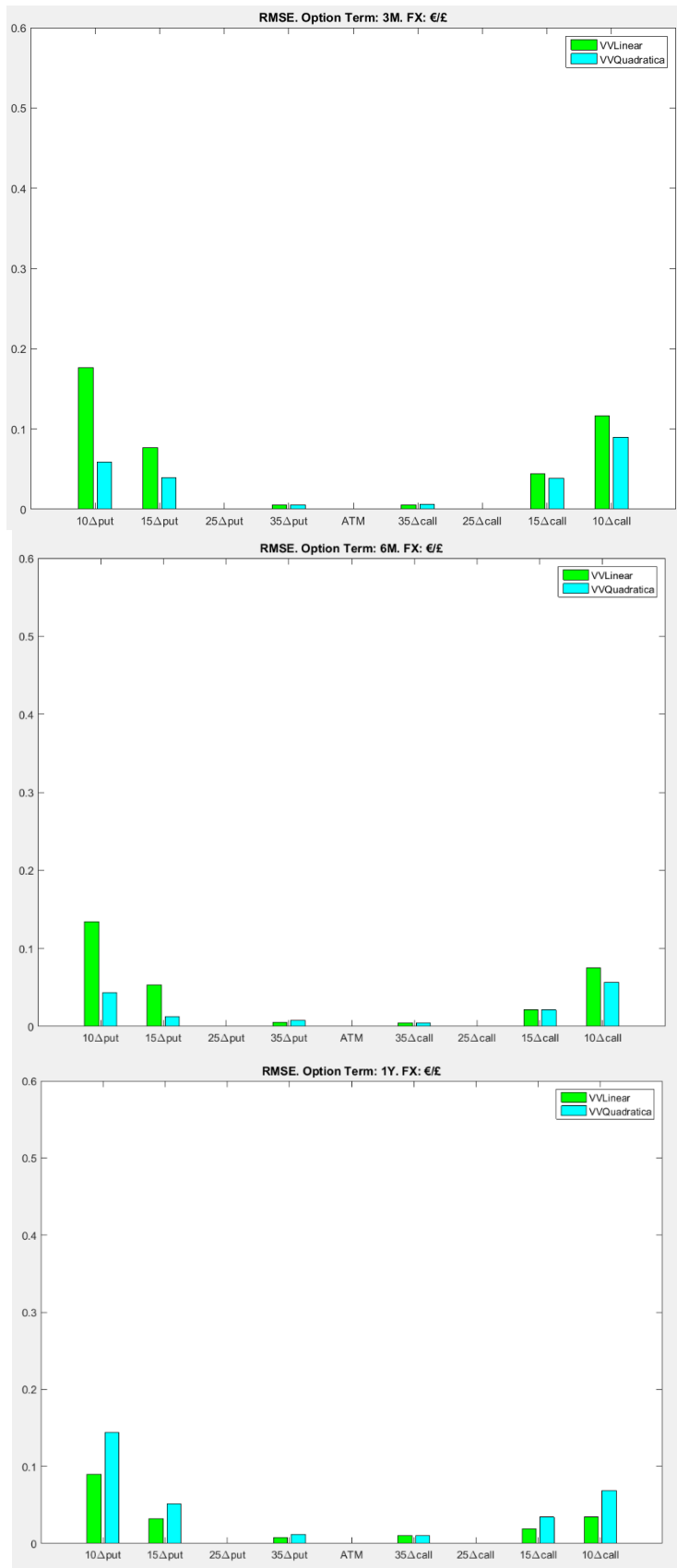


Figura 3 - RMSE para cada grau de *moneyness* no par EUR/GBP e para maturidades das opções de 3M (cima), 6M (centro) e 1Y (baixo)

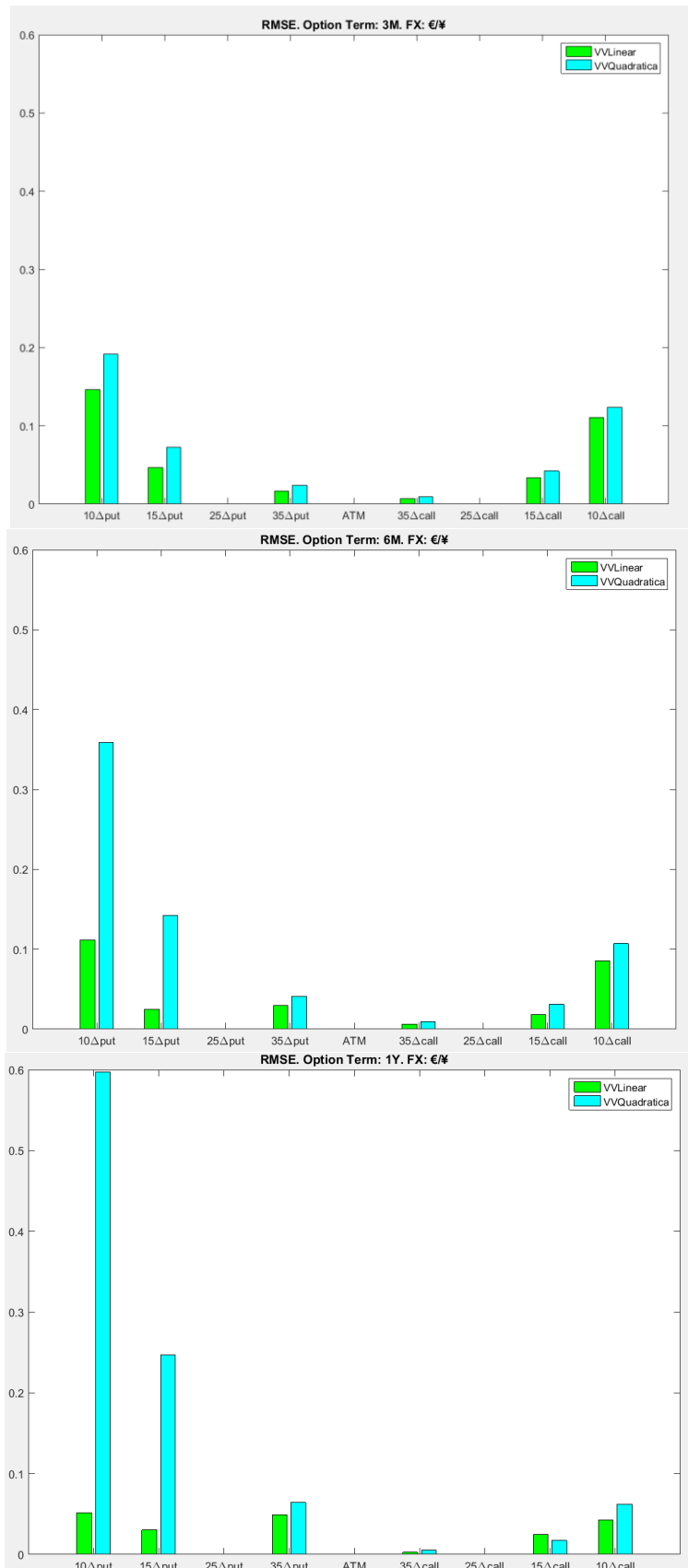


Figura 4 - RMSE para cada grau de *moneyness* no par EUR/JPY e para maturidades das opções de 3M (cima), 6M (centro) e 1Y (baixo)

Conclusões

O método Vanna-Volga permite-nos obter valores de volatilidade fora dos ATM e 25Δ com base na construção de um *hedged-portfolio* em que a volatilidade do modelo de Black-Scholes é tratada como uma variável estocástica e tendo como pressuposto o conhecimento das volatilidades de mercado para os *strikes* mencionados.

Utilizando as volatilidades cotadas em mercado avaliamos a qualidade do método Vanna-Volga com aproximação linear e quadrática para três pares de moedas, cada um deles com três maturidades de diferentes das opções. Daqui resultou que a aproximação quadrática é a melhor para opções *in-the-money* para os pares de moedas EUR/USD e EUR/GBP, verificando-se o inverso para o par EUR/JPY.

Sendo o principal par o EUR/USD a aproximação a ser implementada é a quadrática. Em todo o caso o método Vanna-Volga revela-se em geral adequado para aproximar cotações de mercado, tendo ficado evidenciada a viabilidade de alimentar um conjunto alargado de graus de *moneyness* apenas a partir de dados para ATM e 25Δ .

Bibliografia

[1] CASTAGNA, Antonio; MERCURIO, Fabio. OPTION PRICING: The vanna-volga method for implied volatilities. Risk, 2007, 20.1: 106.

[2] Shkolnikov, Yuriy. "Generalized vanna-volga method and its applications." Available at SSRN

[3] BISESTI, Lorenzo; CASTAGNA, Antonio; MERCURIO, Fabio. Consistent pricing and hedging of an FX options book. The Kyoto Economic Review, 2005, 74.1: 65-83